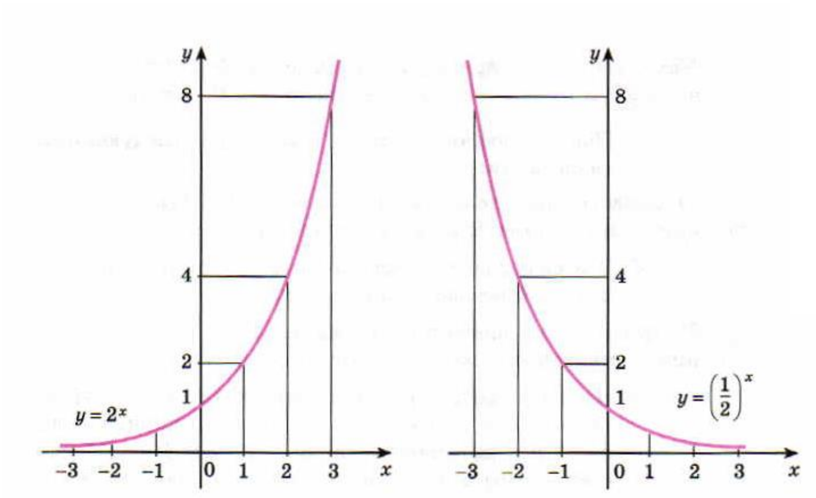
11.11.23

Математика

Тема: «Показательные уравнения и неравенства»

Показательная функция

$y = 2^x$ **$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$** Выполнить № 213.



Решение простейших показательных уравнений

Задача 1 Решить уравнение $3^x = 27$.

▶ По свойству (2) показательной функции данное уравнение имеет корень, так как $27 > 0$. Одним из корней является число $x = 3$, так как $3^3 = 27$.

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени (см. сл. 2, § 5, гл. I): степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Задача 1 Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

▶ Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$.

Ответ $x = -2$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

▶ Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$, или в виде $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

▶ Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2}, получаем $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$, $3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $3^x = 7^x$.

▶ Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Ответ $x = 0$. ◁

Задача 5 Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

▶ Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

▶ Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 7 Решить уравнение

$$5^{2x^2-5x} = 5^{x^2+2x-10}. \quad (1)$$

▶ Так как $5 > 0$, $5 \neq 1$, то

$$2x^2 - 5x = x^2 + 2x - 10, \quad (2)$$

откуда $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

Ответ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

Отметим, что при таком способе решения получается уравнение, равносильное исходному, например уравнение (2) равносильно уравнению (1). Поэтому после решения уравнения (2) проверка не нужна (если есть уверенность в том, что не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

Задача 8 Решить уравнение $3^{|x-1|} = 3^{|x+3|}$.

▶ Так как $3 > 0$, $3 \neq 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $|x - 1| = |x + 3|$.

Возводя это уравнение в квадрат, получаем его следствие $(x-1)^2=(x+3)^2$, откуда

$$x^2-2x+1=x^2+6x+9, \quad 8x=-8, \quad x=-1.$$

Проверка показывает, что $x=-1$ — корень исходного уравнения.

Ответ $x=-1$. ◁

Задача 9 Решить уравнение $\sqrt[x]{3}\cdot\sqrt[x]{5}=225$.

▶ Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(3\cdot 5)^{\frac{1}{x}}=225,\\ x\in N,\ x>1.\end{cases}$$

Преобразовав уравнение системы к виду $15^{\frac{1}{x}}=15^2$, имеем $\frac{1}{x}=2$, откуда $x=\frac{1}{2}$. Но $x=\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $x>1$, $x\in N$, т. е. уравнение не имеет корней. ◁

Упражнения

Решить уравнение (208—223).

208 1) $4^{x-1}=1$; 2) $0{,}3^{3x-2}=1$; 3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

209 1) $27^x=\frac{1}{3}$; 2) $400^x=\frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$.

210 1) $3\cdot 9^x=81$; 2) $2\cdot 4^x=64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;

5) $0{,}6^x\cdot 0{,}6^3=\dfrac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; 6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

211 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;

3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$; 4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$.

212 1) $5^x=8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x=5^{2x}$; 4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$.

213 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $16^x-17\cdot 4^x+16=0$;

3) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; 4) $64^x-8^x-56=0$.

214 1) $3^{x^2+x-12}=1$; 2) $2^{x^2-7x+10}=1$;

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}}=4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x+1}}$.

215 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1}=1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$;

3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)}=5{,}1\sqrt{5{,}1}$; 4) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

216 1) $10^x=\sqrt[3]{100}$; 2) $10^x=\sqrt[5]{10000}$; 3) $225^{2x^2-24}=15$;

4) $10^x=\frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x=10^{x^2-x}$; 6) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

217 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0{,}7^{-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$.

218 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;

3) $5^{3x}+3\cdot5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot2^{x-1}-5\cdot2^x+6=0$.

219 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

220 1) $(0{,}5)^{x^2-4x+3}=(0{,}5)^{2x^2+x+3}$; 2) $(0{,}1)^{3+2x}=(0{,}1)^{2-x^2}$;

3) $3^{\sqrt{x-6}}=3^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-x}}$.

221 1) $2^{|x-2|}=2^{|x+4|}$; 2) $1{,}5^{|5-x|}=1{,}5^{|x-1|}$;

3) $3^{|x+1|}=3^{2-|x|}$; 4) $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$.

222 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot7^x$;

2) $3^{x+4}+3\cdot5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot11$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot3^{x-3}$.

223 1) $8\cdot4^x-6\cdot2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;

3) $13^{2x+1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot3^x+3=0$;

5) $2^{3x}+8\cdot2^x-6\cdot2^{2x}=0$; 6) $5^{3x+1}+34\cdot5^{2x}-7\cdot5^x=0$.

224 При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?

Решить уравнение (**225—226**).

225 1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; 2) $5^{x-2}=4^{2x-4}$;

3) $2^x\cdot3^x=36^{x^2}$; 4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$.